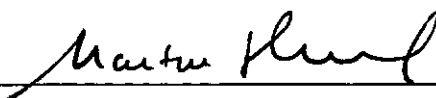


INFLUÊNCIA DA DISSIPACÃO VISCOSA NA TRANSFERÊNCIA DE
CALOR EM TUBOS CONCÊNTRICOS NO ESCOAMENTO TURBULENTO

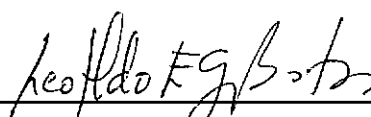
Luiz Armando Gonzalez da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OB
TENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

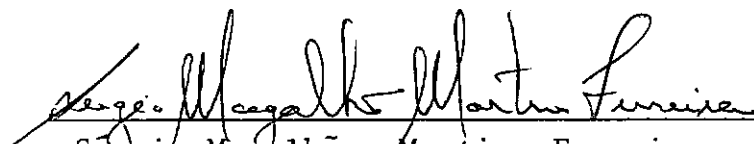
Aprovada por:



Martin Schmal
Presidente



Leopoldo Eurico Gonçalves de Bastos



Sergio Magalhães Martins Ferreira

DA SILVA, LUIZ ARMANDO GONZALEZ

Influência da Dissipação Viscosa na Transferência de Calor em Tubos Concêntricos no Escoamento Turbulento .
[Rio de Janeiro] 1977.

VI, 62p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1977).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro - COPPE.

1. Transferência de Calor. I. COPPE/UFRJ II. Título
(Série).

Dedico este trabalho
a todos àqueles que
dele se utilizarem.

AGRADECIMENTO

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

Lembro de maneira especial a Bia, pelos trabalhos datilográficos, a CAPES, pelo apoio econômico, MARTIN SCHMAL, um orientador de verdade, a família de Eduardo Bourdette, pelo apoio psicológico e a meus pais, pela formação que me deram.

SUMÁRIO

Determina-se o perfil de temperatura no escoamento de um fluido Newtoniano, turbulento, através de dois tubos cilíndricos concêntricos considerando a dissipação viscosa. Utilizam-se perfis de velocidade turbulento em camadas distintas partindo das expressões de Deissler e Quarmby. Determinam-se os perfis de difusividade turbulento de quantidade de movimento em camadas distintas segundo Deissler e Quarmby e o perfil de difusividade turbulento de calor segundo Aser e Chao. Resolve-se o sistema numericamente pelo método de Crank-Nicholson.

A influência da dissipação viscosa sobre o perfil de temperatura é bastante pronunciado na região do escoamento turbulento próximo às paredes dos tubos interno e externo e cresce na direção axial.

ABSTRACT

The temperature profile for a turbulent flow, of a newtonian fluid flowing between two concentric tubes has been determined. The velocity profile was based on the Deissler and Quarmby equations for turbulent flows. The momentum diffusivity equation for the turbulent flow has been evaluated according to Deissler and Quarmby and the heat diffusivity equations and represented according to Aser and Chao. These equations with the corresponding boundary conditions has been solved employing the numerical method of Crank-Nicholson.

The influence of the dissipation on the temperature profile is pronounced in the turbulent flow in the neighborhood of the inner and outer wall of the tube and increases in the axial direction.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II	
DIFUSIVIDADE TÉRMICA TURBULENTA	9
CAPÍTULO III	
PERFIL DE TEMPERATURA	16
CAPÍTULO IV	
RESULTADOS	31
CAPÍTULO V	
CONCLUSÕES	33
BIBLIOGRAFIA	34
NOMENCLATURA	35
APÊNDICE I	36
APÊNDICE II	42
APÊNDICE III	51

ÍNDICE DAS FIGURAS:

FIGURA 1 - PERFIL DE VELOCIDADE	45
FIGURA 2 - PERFIL DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA	46
FIGS:3,4,5,6 - PERFÍIS DA TEMPERATURA	47-50

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O escoamento turbulento em tubos concêntricos tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, tanto teóricos, quanto experimentais.

O perfil de velocidade para o escoamento em tubos concêntricos que será utilizado neste trabalho, foi desenvolvido e equacionado por Quarmby¹, baseado na teoria de Prandtl-von Kàrmàn. Quarmby aplicou a hipótese de similaridade de von Kàrmàn em tubos cilíndricos concêntricos para descrever a dependência do perfil de velocidade, tanto na região interna, quanto na externa do escoamento, tendo como parâmetros o número de Reynolds e a relação entre os raios dos tubos. Estes trabalhos foram feitos para escoamento completamente desenvolvido.

A dependência do perfil de velocidade com estes parâmetros tem sido verificada experimentalmente. A escolha adequada do perfil de velocidade é fundamental na resolução da equação da energia para a determinação do coeficiente de transferência de calor em tubos cilíndricos concêntricos.

a - Formulação das equações para o perfil de velocidade

Para definir o perfil de velocidade no escoamento turbulento em dutos, levamos em consideração duas regiões.

A primeira é a região próxima da parede do duto. A preocupação em considerar esta região, em separado, deve-se ao fato de ser a presença da parede do tubo tão significativa que modifica o regime do escoamento no caso dele ser turbulento, tornando-o laminar.

O perfil de velocidade para esta região é deduzido a partir da expressão de Deissler² para a difusividade turbulenta, ou seja:

$$\frac{\epsilon_m}{\nu} = \mu^2 v_z^+ y^+ \left[1 - \exp(-\mu^2 v_z^+ y^+) \right] \quad (I.1)$$

onde $\underline{\mu}$ é um fator de amortecimento que considera o efeito de presença da parede no escoamento turbulento.

A segunda região é aquela onde se dá o escoamento turbulento perfeitamente caracterizado.

O perfil de velocidade, nesta região, é calculado a partir da hipótese de similaridade de von Kàrmàn, onde a difusividade turbulenta é dada por¹⁾

$$\epsilon_m = \rho \ell^2 \left| \frac{dv_z^+}{dy^+} \right| \quad (I.2)$$

sendo

$$\ell = K \frac{dv_z^+}{dy} \bigg/ \frac{d^2 v_z^+}{dy^{+2}} \quad (I.2a)$$

o comprimento de mistura de Prandtl.

As velocidades v_{z1}^+ e v_{z2}^+ do perfil da subcamada e do escoamento principal, respectivamente, bem como os respectivos gradientes $\frac{dv_z^+}{dy^+}$ e $\frac{dv_z^+}{dy^+}$ são iguais no limite da subcamada.

A viscosidade molecular μ^* é incluída tanto na subcamada, quanto no escoamento principal e a variação da tensão de cisalhamento através do duto é considerada.

Através de um balanço de forças num elemento do fluido obtém-se, para fluidos newtonianos, a seguinte relação:

$$\frac{\tau}{\tau_p} = 1 - \frac{y^+}{y_e^+} \quad (I.3)$$

onde τ representa uma tensão de cisalhamento do escoamento e τ_p a tensão de cisalhamento junto à parede, tanto para o tubo circular, quanto para o canal de placas paralelas. Além disso,

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \left(1 + \frac{\epsilon_m}{v}\right) \frac{dv_z^+}{dy^+} \quad (I.4)$$

é obtido a partir das definições de tensão de cisalhamento no escoamento principal e na subcamada.

Neste trabalho, tanto os perfis de velocidade inter-

nos, como externos do escoamento anular, são obtidos a partir das equações (I.1), (I.2) e (I.4).

b - Perfil interno

Consequentemente para o perfil de velocidade na subcamada, próximo da parede interna do escoamento anular, vem

$$\frac{dv_{z1i}^+}{dy^+} = \frac{\tau/\tau_i}{1 + \mu_i^2 v_{z1i}^+ y_i^+ [1 - \exp(-\mu_i^2 v_{z1i}^+ y_i^+)]} \quad (I.5)$$

válida para $0 < y_i^+ < y_{\ell_i}^+$, sendo $v_{z1i}^+ = 0$ quando $y_i^+ = 0$.

A parte correspondente ao escoamento principal do perfil interno, obtido através de (I.2a) e (I.4) é dada por

$$\frac{d^2 v_{z2i}^+}{dy_i^{+2}} = \frac{-K (dv_{z2i}^+ / dy_i^+)^2}{\left[\frac{\tau}{\tau_i} - \frac{dv_{z2i}^+}{dy_i^+} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (I.6)$$

válida para $y_{\ell_i}^+ < y_i^+ < y_{m_i}^+$, sendo

$$v_{z1i}^+ = v_{z2i}^+ \quad \text{e} \quad \frac{dv_{z1i}^+}{dy_i^+} = \frac{dv_{z2i}^+}{dy_i^+} \quad \text{quando}$$

$$y_i^+ = y_{\ell_i}^+.$$

c - Perfil externo

Correspondente à parte externa do perfil, podemos determinar duas expressões baseados nos mesmos conceitos que permitiram descrever o perfil interno.

A parte correspondente à subcamada será descrita por:

$$\frac{dv_{z_{1e}}^+}{dy_e^+} = \frac{\tau/\tau_e}{1 + u_e^2 v_{z_{1e}}^+ y_e^+ \left[1 - \exp(-u_e^2 v_{z_{1e}}^+ y_e^+) \right]} \quad (\text{I.7})$$

válida para $0 < y_e^+ < y_{\ell_e}^+$ sendo $v_{z_{1e}}^+ = 0$ para $y_e^+ = 0$.

A parte correspondente ao escoamento principal do perfil externo também é obtida através de (I.2a) e (I.4) resultando:

$$\frac{d^2 v_{z_{2e}}^+}{dy_e^{+2}} = \frac{-K (dv_{z_{2e}}^+ / dy_e^+)^2}{\left[\frac{\tau}{\tau_e} - \frac{dv_{z_{2e}}^+}{dy_e^+} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.8})$$

válida para $y_{\ell_e}^+ < y_e^+ < y_{m_e}^+$ sendo

$$v_{z_{2e}}^+ = v_{z_{1e}}^+ \quad \text{e} \quad \frac{dv_{z_{2e}}^+}{dy_e^+} = \frac{dv_{z_{1e}}^+}{dy_e^+}$$

quando $y_e^+ = y_{\ell_e}^+$

As relações entre as tensões de cisalhamento nas equações (I.5) - (I.8) são substituídas e integradas para a determinação do perfil de velocidade. Obtém-se essa relação a partir de um balanço de forças no escoamento em tubos concêntricos, ou seja

$$\frac{\tau}{\tau_i} = \frac{r_i (r_m^2 - r^2)}{r (r_m^2 - r_i^2)} \quad (I.9)$$

para $r_i < r < r_m$ e

$$\frac{\tau}{\tau_e} = \frac{r_e (r^2 - r_m^2)}{r (r_e^2 - r_m^2)} \quad (I.10)$$

para $r_m < r < r_e$ enquanto

$$\frac{\tau_e}{\tau_i} = \frac{r_i (r_e^2 - r_m^2)}{r_e (r_m^2 - r_i^2)}$$

Necessitam-se, ainda, de outros parâmetros que se encontram nas equações (I.5) - (I.8) e suas respectivas condições limítrofes, ou seja:

$$y_{\ell_i}^+ = \frac{y_i^+}{y_{m_i}^+ + y_{m_e}^+} \quad (I.11)$$

$$y_{\ell_e}^+ = \frac{y_e^+}{y_{m_i}^+ + y_{m_e}^+} \quad (I.12)$$

onde

$$y_{m_i}^+ = r_{m_t}^+ - r_i^+ \quad (I.13)$$

$$y_{m_e}^+ = r_e^+ - r_{m_t} \quad (I.14)$$

onde

$$r_i^+ = r \frac{\sqrt{\tau_i/\rho}}{\nu} \quad (I.15)$$

e

$$r_e^+ = r \frac{\sqrt{\tau_e/\rho}}{\nu} \quad (I.16)$$

onde r_{m_t} é o raio de velocidade máxima turbulenta.

O raio correspondente à velocidade máxima turbulenta r_{m_t} pode ser obtido através do produto do raio correspondente à velocidade máxima laminar obtida analiticamente e o parâmetro \underline{k} , que relaciona os raios de velocidade máxima turbulenta e laminar. Este parâmetro, \underline{k} , foi determinado experimentalmente em função do número de Reynolds para diferentes valores de b .

Logo, sendo

$$r_{m_\ell} = \frac{(r_e^2 - r_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[2\ell n(r_e/r_i)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (I.17)$$

O raio correspondente à velocidade máxima laminar, tem-se

$$r_{m_t} = k \cdot \frac{(r_e^2 - r_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[2\ell n(r_e/r_i)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (I.18)$$

Em recente trabalho realizado por Schmal et al³ foram determinadas correções para os parâmetros geométricos como

função do número de Reynolds, atribuindo a cada parâmetro um polinômio que melhor se ajustasse à curva de dados obtidos experimentalmente.

É possível calcular os parâmetros que se fazem necessários para a determinação do perfil de velocidade, conhecendo-se a relação entre os raios, b , e o número de Reynolds.

Note-se, também, que foram feitas verificações para os casos de $b = 1,05$ e $b = 50$ o que, do ponto de vista prático, corresponde a um canal de placas paralelas e um tubo cilíndrico, respectivamente.

Nesse trabalho utilizar-se-ã os dados obtidos por⁴ tanto na determinação do perfil de difusividade, quanto na determinação do perfil de temperatura.

CAPÍTULO II

DIFUSIVIDADE TÉRMICA TURBULENTA

Como visto anteriormente, a relação entre a difusividade turbulenta de quantidade de movimento, ϵ_m , e o comprimento de mistura, ℓ , dado pela hipótese de similaridade de von Kàrmàn é feito através de:

$$\epsilon_m = \rho \ell^2 \left| \frac{dv_z}{dy} \right| \quad (I.2)$$

sendo

$$\ell = K \frac{dv_z}{dy} / \frac{d^2 v_z}{dy^2} \quad (I.2a)$$

No entanto, o uso da equação (I.2) estabelece que a difusividade turbulenta de quantidade de movimento é zero, no raio correspondente à máxima velocidade turbulenta, r_{m_t} .

A difusividade turbulenta de calor, ϵ_H , é obtida a partir da relação entre ϵ_m e ϵ_H .

Assim, ϵ_H é diferente de zero, uma vez que o calor

é transferido através de posições assimétricas.

A difusividade ϵ_m pode ser descrita no escoamento principal por uma expressão dada por Leung et al⁵. Verificou-se que a mesma é válida utilizando os valores experimentais de ϵ_m dados por Quarmby.

Para a região próxima da parede é utilizada a expressão de Deissler⁹. Esta expressão, para a parede interna, é dada por

$$\frac{\epsilon_m}{\nu} = \mu^2 v_{z_i}^+ y_i^+ \left[1 - \exp(-\mu^2 v_{z_i}^2 y_i^+) \right] \quad (\text{II.1})$$

sendo válida para

$$0 < y_i^+ < y_{\ell_i}^+$$

Expressão similar é dada para a região próxima à parede externa, ou seja

$$\frac{\epsilon_m}{\nu} = \mu^2 v_{z_e}^+ y_e^+ \left[1 - \exp(-\mu^2 v_{z_e}^+ y_e^+) \right] \quad (\text{II.2})$$

sendo válida para

$$0 < y_e^+ < y_{\ell_e}^+$$

É importante salientar a semelhança entre a difusividade turbulenta de quantidade de movimento, ϵ_m , e a viscosidade cinemática, ν , dita difusividade molecular da quantidade de movimento. Ambas têm a mesma dimensão e representam o mesmo fenômeno, no escoamento turbulento e laminar, respectivamente.

te.

As equações (II.1) e (II.2) foram obtidas por Deissler², através de considerações adimensionais. Nesta expressão, a difusividade turbulenta, ϵ_m , se aproxima de zero, somente quando y^+ aproxima-se de zero.

A expressão geral, proposta por Deissler é:

$$\frac{\epsilon_m}{\nu} = \mu^2 v_z^+ y^+ \left[1 - \exp(-\mu^2 v_z^+ y^+) \right]$$

Na região afastada da parede o valor da difusividade turbulenta, ϵ_m , é descrito pela expressão dada por Leung et al⁵ para tubos circulares concêntricos. Foi baseada em expressão para tubos circulares dada por Reichardt⁶, que a obteve através de resultados experimentais.

A expressão obtida experimentalmente por Reichardt⁶ para tubos circulares é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\epsilon_m}{\nu} = \frac{kr_e^+}{6} \left[1 - \left(\frac{r}{r_e} \right)^2 \right] \left[1 + 2 \left(\frac{r}{r_e} \right)^2 \right] \quad (\text{II.3})$$

As equações propostas por Quarmby⁴ descritas para a parede interna e externa são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_m}{\nu} = & \frac{1}{15} \left(1 - \frac{a}{b} \right) r_e^+ \left(1 - \beta_i^2 \right) \left(1 + 2\beta_i^2 \right) \\ & \times \left[1 + 0,6 \sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_i}} \beta_i (1 - \beta_i) \right], \end{aligned}$$

$$\cdot \left[1 - \left(1 - \frac{y_{m_i}^+}{y_{m_e}^+} \right) \beta_i \right] - C_i \quad (\text{II.4})$$

onde

$$\beta_i = 1 - \frac{y_i^+}{y_{m_i}^+}$$

sendo esta expressão, (II.4), válida para $y_{\ell_i}^+ < y_i^+ < y_{m_i}^+$ e

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_m}{v} &= \frac{1}{15} \left(1 - \frac{a}{b} \right) r_e^+ (1 - \beta_e^2) (1 + 2\beta_e^2) \cdot \\ &\cdot \left[1 + 0,6\beta_e(1 - \beta_e) \right] - C_e \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

onde

$$\beta_e = 1 - \frac{y_e^+}{y_{m_e}^+}$$

sendo a expressão (II.5) válida para $y_{\ell_e}^+ < y_e^+ < y_{m_e}^+$.

É interessante notar a diferença existente entre as e quações (II.4) e (II.5) devido a um fator de multiplicação cons tante $\sqrt{\frac{\tau_i}{\tau_e}}$.

Esta diferença torna-se necessária para eliminar a descontinuidade existente entre as velocidades máximas de cada lado do perfil.

A descontinuidade é proveniente da diferença entre as definições de velocidade internas e externas, uma vez que uma é definida em função da tensão de cisalhamento na parede interna

e a outra em função da tensão de cisalhamento na parede externa.

Sendo estas duas tensões diferentes devido a não haver simetria em tubos concêntricos, as velocidades definidas desta forma terão, forçosamente, que apresentar a descontinuidade.

Outro ponto importante de ser observado nas equações (II.4) e (II.5), é a presença dos parâmetros C_i e C_e , respectivamente.

Leung, E.Y. et al⁵ fizeram uso das equações (II.1) e (II.2) para cálculo da difusividade turbulenta de quantidade de movimento, ϵ_m , nas subcamadas e das equações (II.4) e (II.5), com τ_i e τ_e iguais a zero para o escoamento principal.

O valor de ϵ_m dado para $y_{\ell_i}^+$ pela equação (II.1) é igual ao dado pela equação (II.4) para a mesma posição.

Descontinuidade semelhante ocorreu entre as equações (II.4) e (II.5).

Os parâmetros τ_i e τ_e são introduzidos nas equações (II.4) e (II.5) para evitar estas descontinuidades.

Logo, se a diferença entre os valores das difusividades ϵ_m calculadas no ponto comum às duas regiões, subcamada e escoamento principal, com τ_i e τ_e iguais a zero, for chamado de $\Delta(\epsilon_m)$, tem-se⁴

$$C_i = \Delta(\epsilon_m)_i (y_{m_i}^+ - y_i^+) / (y_{m_i}^+ - y_{\ell_i}^+) \quad (\text{II.6})$$

válida para $y_{\ell_i}^+ < y_i^+ < y_{m_i}^+$ e

$$C_e = \Delta(\epsilon_m)_e (y_{m_e}^+ - y_e^+) / (y_{m_e}^+ - y_{\ell_e}^+)$$

válida para $y_{\ell_e}^+ < y_e^+ < y_{m_e}^+$.

Os valores de $\Delta(\epsilon_m)_i$ e $\Delta(\epsilon_m)_e$ são obtidos subtraindo-se a equação (II.1) da equação (II.4) e a equação (II.2) da (II.5).

Uma vez conhecidos os valores da difusividade de quantidade de movimento, ϵ_m , podemos, através da relação do tipo $\frac{\epsilon_H}{\epsilon_m}$ determinar o valor da difusividade turbulenta de calor, ϵ_H .

A difusividade turbulenta de calor, ϵ_H , na expressão (III.4) é obtida introduzindo as expressões para ϵ_m na expressão para ϵ_H/ϵ_m apresentada por Jenkins⁴ ou por Azer e Chao⁷.

A expressão dada por Jenkins⁴ baseia-se no tratamento do "vortice turbulento" como uma esfera de raio igual ao comprimento de mistura, ℓ , a qual libera calor e quantidade de movimento enquanto se move com uma velocidade v .

A expressão proposta tem a seguinte forma:

$$\frac{\epsilon_H}{\epsilon_m} = P_r \left\{ \frac{1 - \frac{90}{\pi^6} \cdot \frac{\ell v'}{\alpha} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^6} \left[1 - \exp \frac{-\mu^2 \pi^2 \alpha}{\ell v'} \right]}{1 - \frac{90}{\pi^6} \cdot \frac{\ell v'}{v} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^6} \left[1 - \exp \frac{-\mu^2 \pi^2 v}{\ell v'} \right]} \right\} \quad (\text{II.7})$$

As expressões propostas por Azer e Chao⁷ são obtidas

através de argumentos semelhantes aos usados por Jenkins⁴ resultando, entretanto, em equações descritas em função do número de Reynolds e do número de Prandtl do escoamento.

As equações são expressas da seguinte forma:

$$\frac{\epsilon_H}{\epsilon_m} = \frac{1 + 135 \text{Re}^{-0,45} \exp \left[(-y_i^+/y_{m_i}^+)^{0,25} \right]}{1 + 57 \text{Re}^{-0,46} \text{Pr}^{-0,58} \exp \left[-(y_i^+/y_{m_i}^+)^{0,25} \right]} \quad (\text{II.8})$$

válida para $\text{Pr} > 0,6$ e

$$\frac{\epsilon_H}{\epsilon_m} = \frac{1 + 135 \text{Re}^{-0,45} \exp \left[(-y_i^+/y_{m_i}^+)^{0,25} \right]}{1 + 380 (\text{Re} \text{Pr})^{-0,58} \exp \left[-(y_i^+/y_{m_i}^+)^{0,25} \right]} \quad (\text{II.9})$$

válida para $\text{Pr} < 0,6$.

Expressões similares às equações (II.8) e (II.9) são obtidas para a parte externa do escoamento substituindo y_i^+ por y_e^+ e $y_{m_i}^+$ por $y_{m_e}^+$.

CAPÍTULO III

PERFIL DE TEMPERATURA

Análoga à análise teórica da transferência de calor a partir da equação da energia para os casos de canal de placas paralelas e tubo circular é feita a análise para tubos circulares concêntricos.

O interesse principal sobre esta geometria está na possibilidade de diferentes condições térmicas de contorno em cada uma das duas superfícies de transferência de calor.

Além disso, problemas de transferência de calor, nesta geometria, apresentam dificuldades nas condições de contorno. Podem ser solucionados pelo método da superposição de soluções fundamentais da equação da energia linearizada, tal como pode ser visto em trabalhos realizados por Hatton e Quarmby⁴ para o canal de placas paralelas e Reynolds, Lundberg e McCuen⁸ para tubos circulares concêntricos.

Trabalhos anteriores sobre soluções fundamentais para tubos circulares concêntricos foram efetuados por Leung et al⁵

e Lee e Barrow⁹. Contêm hipóteses e resultados empíricos a respeito da descrição do perfil de velocidade e da variação da difusividade turbulenta as quais têm sido mostradas imprecisas por Quarmby².

Lee e Barrow⁹ admitem que o raio correspondente à máxima velocidade no escoamento turbulento é o mesmo que no escoamento laminar. Leung et al⁵ propuseram que a diferença entre estas duas quantidades fosse uma função da relação entre os raios dos tubos cilíndricos concêntricos.

Mais recentemente, em trabalho realizado por Quarmby¹⁰, é mostrado que o raio correspondente à máxima velocidade no escoamento turbulento, r_{m_t} , é dependente, tanto da relação entre os raios, quanto do número de Reynolds e que, conseqüentemente, o perfil de velocidade é, também, dependente destes dois parâmetros.

Admitindo a hipótese da bi-dependência do perfil de velocidade propõe-se, neste trabalho, determinar o perfil de transferência axial e radial admitindo um fluxo de calor constante na parede do tubo externo enquanto a parede do tubo interno está isolada, determinando o efeito da dissipação viscosa no escoamento turbulento anular. Resolve-se a equação da energia considerando a dissipação viscosa e as difusividades molecular e de calor turbulentos variando com a posição. Considera-se o escoamento em regiões distintas sub-laminar e turbulento.

Equação Geral da Energia

A equação da energia em termos das propriedades de transporte, considerando fluido newtoniano e expressa em coordenadas cilíndricas, apresenta-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\
 = K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \\
 + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \\
 + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 \left. \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \right\} \quad (III.1)
 \end{aligned}$$

As condições impostas ao problema específico, são:

- a) Fluxo de calor constante na parede externa do tubo;
- b) Fluxo de calor nulo na parede interna;
- c) No início do aquecimento a temperatura do fluido é igual à temperatura ambiente;
- d) A condução axial é desprezada;
- e) Introdúz-se a difusividade turbulenta térmica ϵ_H ;

f) Regime estabelecido.

Após estas considerações, a equação resultante é:

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 = \rho C_v v_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

ou

$$\alpha \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{2\mu r}{\rho C_v} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 = v_z r \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III.2})$$

A equação (III.2) aplica-se para o caso de escoamento laminar e para as propriedades do fluido constantes. Para o caso turbulento, introduz-se o termo de difusividade térmica turbulenta, ϵ_H .

Então teremos:

$$(\alpha + \epsilon_H) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \frac{2\hat{\mu}r}{\rho C_v} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 = v_z r \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III.3})$$

onde $\hat{\mu}$ significa uma associação entre a viscosidade molecular e a viscosidade turbulenta.

No caso em que haja variação das propriedades do fluido, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[(\alpha + \epsilon_H) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{2\hat{\mu}r}{\rho C_v} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 = v_z r \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III.4})$$

A equação (III.4) é solucionada para as seguintes condições de contorno:

- a) para $z=0$ o fluido não está aquecido e encontra-se a uma temperatura T_e ;
- b) existe um fluxo de calor uniforme e constante diferente de zero, q_e , na parede externa onde, $r = r_e$ ou na parede interna, q_i , onde $r = r_i$, desde que a parede oposta seja isolada.

A equação (III.4) será adimensionalizada definindo as seguintes variáveis adimensionais:

$$R = \frac{r}{r_e - r_i} \quad ; \quad Z^+ = \frac{z}{D}$$

$$r_e^+ = \frac{r_e \sqrt{\tau_e / \rho}}{v} \quad ; \quad \theta = (T - T_e) / \frac{qD}{k}$$

$$e \quad v_{ze}^+ = \frac{v_z}{\sqrt{\tau_e / \rho}}$$

Para o caso de perfil de temperatura completamente desenvolvido, $\frac{\partial T}{\partial z}$ é constante, o que pode ser verificado a partir de um simples balanço de calor. Consequentemente, a equação diferencial radial torna-se uma equação diferencial ordinária. Em função das variáveis adimensionais,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[\left(\frac{\epsilon_H}{v} + \frac{1}{P_r} \right) R \frac{d\theta}{dR} \right] + Ec \cdot \frac{2}{v_{ze}^{+2}} \left(\frac{dv_{ze}^+}{dR} \right)^2 =$$

$$= \frac{b-1}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \frac{d\theta}{dz^+} \quad (III.5)$$

sendo $b = \frac{r_e}{r_i}$.

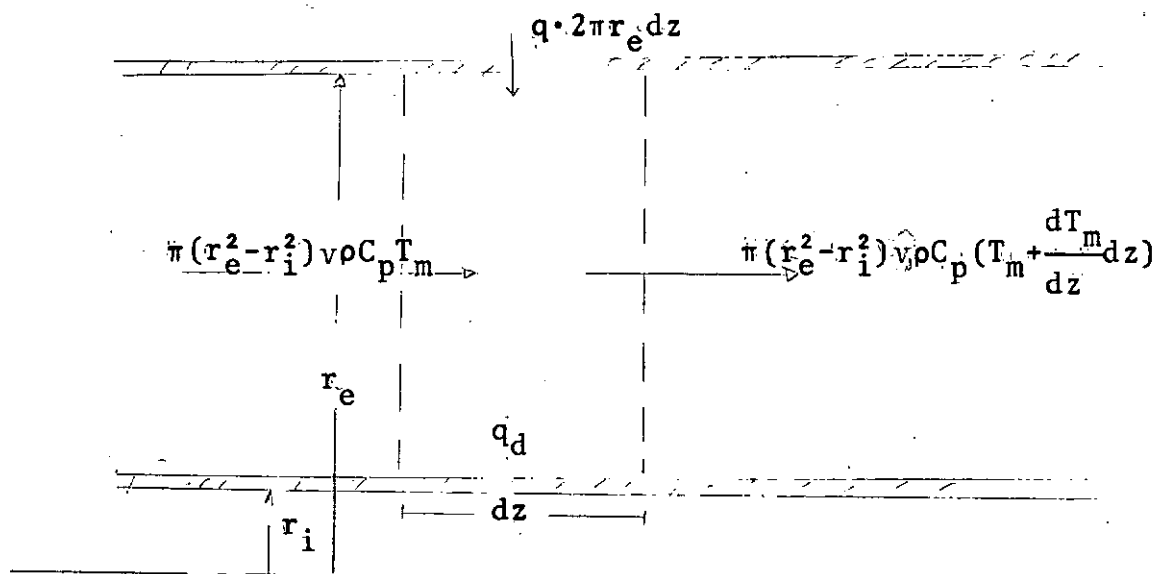
Considerando o fluxo de calor constante e tendo os perfis de velocidade e temperatura completamente desenvolvidos, pode-se mostrar que

$$\frac{d\theta_e}{dz^+} = \frac{d\theta_m}{dz^+}$$

onde θ_e é a temperatura adimensional da parede externa e θ_m é a temperatura adimensional que traduz a temperatura de mistura do fluido.

Esta igualdade verifica-se, também, quando o fluxo de calor é fornecido ao escoamento através da parede interna.

Para aquecimento na parede externa, mantendo a parede interna isolada, temos o seguinte balanço:



$2\pi r_e q dz \rightarrow$ fluxo de calor fornecido pela fonte sobre a parede externa.

$q_d = \pi(r_e^2 - r_i^2) v_z \hat{u} \frac{dv_z}{dr} \rightarrow$ fluxo de calor gerado por dissipação viscosa.

Assim, podemos escrever

$$\frac{d\theta}{dz^+} = \frac{1}{Re \, Pr} - \frac{4b}{(b+1)} + Ec \cdot \frac{Re_x \cdot dv_z^+/dR}{v_z^{+2} r_e^+ dz^+} \quad (III.6)$$

onde $Re_x = \frac{r_e}{r_e - r_i}$ e dz^+ será o incremento adotado na solução numérica.

Solução Numérica

Para solução do problema foi usado o método das diferenças finitas de Crank-Nicolson.

Partindo da equação (III.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[\left(\frac{\epsilon_H}{v} + \frac{1}{Pr} \right) R \frac{d\theta}{dR} \right] + Ec \cdot \frac{2}{v_{ze}^+} \left(\frac{dv_{ze}^+}{dR} \right)^2 = \\ = \frac{b-1}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \frac{d\theta}{dz^+} \end{aligned}$$

chamando

$$\left(\frac{\epsilon_H}{v} + \frac{1}{Pr} \right) = L$$

podemos escrever:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[LR \frac{d\theta}{dR} \right] + Ec \cdot \frac{2}{v_z^{+2}} \left(\frac{dv_z^+}{dR} \right)^2 = \frac{b-1}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \frac{d\theta}{dz^+} \quad (\text{III.7})$$

rearranjando, vem:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{L}{R} \frac{d\theta}{dR} + \frac{d\theta}{dR} \cdot \frac{dL}{dR} + Ec \cdot \frac{2}{v_{ze}^{+2}} \left(\frac{dv_z^+}{dR} \right)^2 = \\ = \frac{b-1}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \frac{d\theta}{dz^+} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Aplicando, agora, o método de Crank-Nicholson na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dR^2} = \frac{1}{2h^2} \left[(\theta_{r+1,s+1} - 2\theta_{r,s+1} + \theta_{r-1,s+1}) + \right. \\ \left. + (\theta_{r+1,s} - 2\theta_{r,s} + \theta_{r-1,s}) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{d\theta}{dR} = \frac{1}{4h} \left[(\theta_{r+1,s+1} - \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - \theta_{r-1,s}) \right] \quad (\text{III.10})$$

$$\frac{dL}{dR} = \frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{d\theta}{dz^1} = \frac{\theta_{r,s+1} - \theta_{r,s}}{h} \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{dv_{ze}^+}{dR} = \frac{v_{ze\ r+1}^+ - v_{ze\ r-1}^+}{2h} \quad (\text{III.13})$$

e

$$L = Lr$$

$$v_{ze}^+ = v_{ze\ r}^+$$

$$R = Rr$$

Então

$$\begin{aligned} & \frac{Lr}{2h^2} \left[(\theta_{r+1,s+1} - 2\theta_{r,s+1} + \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - 2\theta_{r,s} + \theta_{r-1,s}) \right] + \\ & + \frac{Lr}{Rr4h} \left[(\theta_{r+1,s+1} - \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - \theta_{r-1,s}) \right] + \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \frac{1}{4h} \\ & \cdot \left[(\theta_{r+1,s+1} - \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - \theta_{r-1,s}) \right] + \frac{2Ec}{v_{ze\ r}^{+2}} \left(\frac{v_{ze\ r+1}^+ - v_{ze\ r-1}^+}{2h} \right)^2 \\ & = \frac{(b-1)}{2b} v_{ze\ r}^+ r_e^+ \frac{1}{h} (\theta_{r,s+1} - \theta_{r,s}) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Considerando a parede interna isolada e, sobre a pare de externa a incidência de um fluxo de calor constante, podemos dizer:

por definição

$$\theta_o = (T - T_e) / \frac{q_e^D}{k} \quad e \quad R = \frac{r}{r_e - r_i}$$

donde, para $r = r_e \rightarrow R = R_e$ qq z^+

$$\left. \frac{d\theta_e}{dR} \right|_e = \frac{1}{2} \quad (\text{III.15})$$

$$\frac{(b-1)}{2b} v_{z_e}^+ r_e^+ \frac{d\theta}{dz^+} = 0 \quad \text{a convecção na parede é nula}$$

$$Ec \cdot \frac{2}{v_{z_e}^{+2}} \left(\frac{dv_z^+}{dR} \right)^2 = 0 \quad \text{a dissipação na parede é nula}$$

Então

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(LR \frac{d\theta}{dR} \right) = 0$$

$$L \frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{L}{R} \frac{d\theta}{dR} + \frac{d\theta}{dR} \frac{dL}{dR} = 0 \quad (\text{III.16})$$

Explicitando cada elemento da equação (III.16), em termos de diferenças finitas, através do método de Crank Nicholson, podemos escrever que:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{h^2}{4R_e} + \frac{h^2}{4} + \frac{h}{2} \quad (\text{III.17})$$

onde θ_{n+1} representa a temperatura adimensional na parede do tubo externo.

Para o tubo interno, vem:

quando $r = r_i \rightarrow R = R_i$ qq z^+

$$\left. \frac{d\theta_e}{dR} \right|_i = 0 \quad (\text{III.18})$$

com desenvolvimento semelhante ao utilizado para obtermos a equação (III.16), concluímos:

$$\theta_{0,s} = \theta_{1,s} \quad (\text{III.19})$$

onde $\theta_{0,s}$ é o valor da temperatura adimensional na parede do tubo interno.

As equações (III.16) e (III.18) são as representações formais dos efeitos sobre o problema das condições de contorno impostas.

Voltando à equação (III.14)

$$\begin{aligned} & \frac{Lr}{2h^2} \left[(\theta_{r+1,s+1} - 2\theta_{r,s+1} + \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - 2\theta_{r,s} + \theta_{r-1,s}) \right] \\ & + \frac{Lr}{Rr4h} \left[(\theta_{r+1,s+1} - \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - \theta_{r-1,s}) \right] + \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \\ & \cdot \left[(\theta_{r+1,s+1} - \theta_{r-1,s+1}) + (\theta_{r+1,s} - \theta_{r-1,s}) \right] + \frac{2Ec}{v_{z,e_r}^{+2}} \left(\frac{v_{z,r+1}^+ - v_{z,r-1}^+}{2h} \right)^2 = \\ & = \frac{b-1}{2b} v_{z,e_r}^+ r_e^+ \frac{1}{h} (\theta_{r,s+1} - \theta_{r,s}) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Agrupando os coeficientes de uma mesma posição e rearranjando, temos:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{L_r}{2h^2} + \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} + \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] T_{r+1,s+1} + \left[-\frac{L_r}{h^2} - \frac{(b-1)}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \right] T_{r,s+1} \\
& + \left[\frac{L_r}{2h^2} - \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} - \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] T_{r-1,s+1} = - \left[\frac{L_r}{2h^2} + \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} + \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] \\
& \cdot T_{r+1,s} - \left[-\frac{L_r}{h^2} + \frac{(b-1)}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \right] T_{r,s} - \left[\frac{L_r}{2h^2} - \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} - \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] \\
& \cdot T_{r-1,s} - \frac{2Ec}{v_{ze}^{+2}} \left(\frac{v_{ze}^+ r_{e+1} - v_{ze}^+ r_{e-1}}{2h} \right)^2 \quad (III.21)
\end{aligned}$$

Chamando de:

$$A_r = \left[\frac{L_r}{2h^2} + \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} + \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] \quad (III.22)$$

$$B_r = \left[-\frac{L_r}{h^2} - \frac{(b-1)}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \right] \quad (III.23)$$

$$C_r = \left[\frac{L_r}{2h^2} - \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} - \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] \quad (III.24)$$

e

$$\begin{aligned}
D_{rs} = & - \left[\frac{L_r}{2h^2} + \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} + \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] T_{r+1,s} - \left[-\frac{L_r}{h^2} + \frac{(b-1)}{2b} v_{ze}^+ r_e^+ \right] T_{r,s} \\
& - \left[\frac{L_r}{2h^2} - \frac{L_r}{Pr \cdot 4h} - \frac{1}{4h} \left(\frac{L_{r+1} - L_{r-1}}{2h} \right) \right] T_{r-1,s} - \frac{2Ec}{v_{ze}^{+2}} \left(\frac{v_{ze}^+ r_{e+1} - v_{ze}^+ r_{e-1}}{2h} \right)^2 \\
& \quad (III.25)
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (III.22), (III.23), (III.

24) e (III.25) na equação (III.21), obtemos:

$$A_r T_{r+1,s+1} + B_r T_{r,s+1} + C_r T_{r-1,s+1} = D_{r,s} \quad (\text{III.26})$$

Os coeficientes A_r , B_r e C_r são constantes segundo a direção axial, variando na direção radial.

O termo $D_{r,s}$ varia tanto na direção radial, quanto na axial.

A sua variação na direção axial deve-se ao fato dele depender dos valores de temperaturas calculadas em uma secção transversal "s".

Os primeiros valores de $D_{r,s}$ ou seja, os valores de $D_{r,0}$ são obtidos através da condição inicial que, mostra ser $\theta_{r,0} = \theta_{r,1} = 0 \quad p/q \cdot r$.

Através da equação (III.26) e com o auxílio da condição inicial e das condições de contorno na parede interna e externa, estabelecemos um sistema de equações que irá nos permitir determinar o perfil de temperatura.

Assim, desenvolvendo o sistema a partir da equação (III.26), podemos escrever:

$$\begin{array}{lcl}
 r=1 & \left\{ \begin{array}{l} A_1 \theta_2 + B_1 \theta_1 + C_1 \theta_0 = D_1 \\ A_2 \theta_3 + B_2 \theta_2 + C_2 \theta_1 = D_2 \\ A_3 \theta_4 + B_3 \theta_3 + C_3 \theta_2 = D_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. & \\
 r=2 & & \\
 r=3 & & \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 r=n-1 & \left\{ \begin{array}{l} A_{n-1} \theta_n + B_{n-1} \theta_{n-1} + C_{n-1} \theta_{n-2} = D_{n-1} \\ A_n \theta_{n+1} + B_n \theta_n + C_n \theta_{n-1} = D_n \end{array} \right. & (III.27)
 \end{array}$$

Ora, de acordo com as equações (III.17) e (III.19) sabemos que

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{h^2}{4R_e} + \frac{h^2}{4} + \frac{h}{2} \quad e$$

$$\theta_1 = \theta_0 \quad \text{qualquer que seja "s".}$$

Aplicando as equações (III.17) e (III.19) no sistema (III.27) e, escrevendo o novo sistema na ordem crescente dos índices das temperaturas, temos:

$$\begin{array}{lcl}
 r=1 & \left\{ \begin{array}{l} (B_1 + C_1) \theta_1 + A_1 \theta_2 = D_1 \\ C_2 \theta_1 + B_2 \theta_2 + A_2 \theta_3 = D_2 \\ C_3 \theta_2 + B_3 \theta_3 + A_3 \theta_4 = D_4 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. & \\
 r=2 & & \\
 r=2 & & \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 r=n-1 & \left\{ \begin{array}{l} C_{n-1} \theta_{n-2} + B_{n-1} \theta_{n-1} + A_{n-1} \theta_n = D_{n-1} \\ C_n \theta_{n-1} + (A_n + B_n) \theta_n = \bar{D}_n \end{array} \right. & (III.28)
 \end{array}$$

onde $\bar{D}_n = D_n - A_n \left(\frac{h^2}{4R_e} + \frac{h^2}{4} + \frac{h}{2} \right)$

Para solucionar o sistema (III.28), faremos uso do Método de Eliminação de Gauss.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Inicialmente foram determinados os perfís de velocidade para um número de Reynolds caracterizando o escoamento turbulento e para um valor do parâmetro geométrico b limitado para o escoamento em tubo circular e escoamento em placas planas, conforme Fig. 1. Para $Re = 86\ 610$ e para $b=2,88$ e com base nos resultados do perfil de velocidade (Fig. 1), foram calculados os perfís de difusividade da quantidade de movimento. Os resultados são bastante satisfatórios, já que não apresentam descontinuidade na região correspondente à velocidade máxima turbulenta. Conforme Fig. 2. Estes resultados foram utilizados para determinar os perfís de temperatura para $Pr=1$ e diferentes valores de Ec . As Figs. 3 e 4 mostram os perfís de temperatura radiais para diferentes posições axiais, caracterizando especialmente a influência da dissipação viscosa. A influência da dissipação viscosa é marcante na região do escoamento turbulento próximo às paredes dos tubos interno e externo. A temperatura do fluido é bem maior junto à parede do tubo externo e cresce na direção axial. Na região central do escoamento, a temperatura do fluido é praticamente igual à temperatura de entrada para qualquer posição axial. Nota-se, pela Figura, que o perfil de temperatura próxi-

mo à parede interna apresenta dois valores máximos. Não há significado físico para o caso e justifica-se o seu aparecimento somente devido ao perfil de difusividade, baseado em condições semi-empíricas válidas para escoamentos específicos, já que a solução numérica é convergente e o método é suficientemente preciso, conforme demonstram os resultados para o perfil de velocidade.

Os resultados encontrados não podem ser comparados experimentalmente devido a não disponibilidade de resultados experimentais para o problema específico.

Podem ser calculados os perfís de temperatura e o método permite calcular, para diferentes valores de Pr , de Ec e Reynolds. O estudo é extensivo para outras geometrias e casos limites como tubo circular e canal de placas planas paralelas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

As expressões para os perfís de velocidade e de difusividade turbulentos em camadas distintas próximas às paredes dos tubos interno e externo são bastante satisfatórias e podem ser utilizadas para resolver a equação da energia.

Devido à dissipação viscosa, os perfís de temperatura do fluido apresentam regiões com temperaturas mais altas que a temperatura de entrada, próximas às paredes dos tubos interno e externo. O perfil de temperatura varia sensivelmente na direção axial.

Os resultados do perfil de temperatura não podem ser comparados devido a não disponibilidade dos mesmos na literatura, mesmo para o caso limite de $Ec=0$. Além do mais, as condições de contorno deste estudo são diferentes das apresentadas para trabalhos anteriores.

REFERÊNCIAS

1. QUARMBY, A., Int. J. Mech. Sci, 4, 205 (1967).
2. DEISSLER, R.G., NACA Report 1247 (1955).
3. SCHMAL, M., RUSSO, C. et al, Rev. Bras. Tecn. 6, 83 (1975).
4. QUARMBY, A. e ARNAUD, R.K., Chem. Eng. Sci., 24.
5. LEUNG, E.Y., KAYS, N.M. and W.C. REYNOLDS, Stanford Univ. Eng. Report, AHT-4.
6. REICHARDT, H., Z. Angew. Math. Mech. 31, 208 (1951).
7. AZER, N.I. and CHAO, B.T., Int. J. Heat Mass Transfer, 1 121 (1960).
8. REYNOLDS, W.C., LUNDBERG, R.E. e McCUEN, P.A., Int. J. Heat Mass Transfer.
9. LEE, Y. and BARROW, H., Proc. I. Mech. Engrs. 178, 1 (1964).
10. QUARMBY, A., J. Aeronaut. Sco. 71, 47 (1967).
11. QUARMBY, A., Appl. Sc. Pes. 19, 205 (1968).
12. ZURMÜHL, R. Praktische Mathematik Springer Verlag, Berlin 1965.

NOMENCLATURA:

r	-	raio variável
R	-	raio adimensional $r/(r_e - r_i)$
z	-	posição axial
T	-	temperatura
T_e	-	temperatura de entrada
D	-	$2(r_e - r_i)$
v_z	-	velocidade axial
c_p	-	calor específico
q	-	fluxo de calor
v_z^+	-	velocidade adimensional $v_z / \sqrt{\tau/\rho}$
r^+	-	raio adimensional $r \sqrt{\tau/\rho/\delta}$
z^+	-	variável axial adimensional Z/D
y^+	-	variável adimensional
τ	-	tensão de cisalhamento
ν	-	viscosidade cinemática
μ	-	viscosidade dinâmica turbulenta
ρ	-	densidade
ϵ_m	-	difusividade turbulenta de quantidade de movimento
ϵ_H	-	difusividade turbulenta de calor
k	-	condutividade térmica
θ	-	temperatura adimensional $(T - T_e)/qD/k$
b	-	relação de raios
Pr	-	nº de Prandtl
Ec	-	nº de Eckert
Re	-	nº de Reynolds

SUBSCRITOS

i	-	interno
e	-	externo
l	-	sub-camada laminar
m	-	posição correspondente a máxima velocidade
t	-	turbulento

APÊNDICE I

A adimensionalização da equação (III.4), segundo as variáveis adimensionais estabelecidas neste trabalho, é detalhadamente mostrada neste Apêndice.

Relembrando nosso modelo matemático e as variáveis a dimensionais propostas, temos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[(\alpha + \epsilon_H) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{2\hat{\mu}r}{\partial C_V} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 = v_z r \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III.4})$$

$$R = \frac{r}{r_e - r_i} \quad ; \quad z^+ = \frac{z}{D} \quad ; \quad r_e^+ = \frac{r_e \sqrt{\tau_e / \rho}}{v}$$

$$= (T - T_e) / \frac{qD}{k} \quad e \quad v_z^+ = \frac{v_z}{\sqrt{\tau_e / \rho}}$$

CÁLCULOS

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{r_e - r_i} \quad e \quad \frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{k}{qD}$$

Podemos dizer que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{\partial \theta}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial R}$$

mas

$$\frac{\partial r}{\partial R} = (r_e - r_i)$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

sendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{k}{qD}$$

Portanto:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{q \cdot D}{k(r_e - r_i)} \frac{\partial \theta}{\partial R}$$

chamemos

$$\frac{k(r_e - r_i)}{q \cdot D} = L \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial r} = X$$

Podemos, então, dizer:

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = L \cdot X$$

donde

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} = L \frac{\partial X}{\partial R}$$

mas

$$\frac{\partial X}{\partial R} = \frac{\partial X}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial R}$$

sendo

$$\frac{\partial r}{\partial R} = r_e - r_i$$

vem

$$\frac{\partial X}{\partial R} = (r_e - r_i) \frac{\partial X}{\partial r}$$

mas

$$X = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Portanto

$$\frac{\partial X}{\partial R} = (r_e - r_i) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

Substituindo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{q \cdot D}{k(r_e - r_i)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2}$$

Para a variação de temperatura, segundo a direção z , temos:

$$\frac{\partial z^+}{\partial z} = \frac{1}{D}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z^+} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z^+}$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

mas

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{k}{qD}, \quad \text{portanto}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{q}{k} \frac{\partial \theta}{\partial z^+}$$

Para o gradiente de velocidade, vem:

$$\frac{\partial v_z^+}{\partial v_z} = \frac{1}{\sqrt{\tau_e/\rho}}$$

então

$$\frac{\partial v_z^+}{\partial R} = \frac{\partial v_z^+}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial R}$$

mas

$$\frac{\partial r}{\partial R} = r_e - r_i$$

e

$$\frac{\partial v_z^+}{\partial r} = \frac{\partial v_z^+}{\partial v_z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

mas

$$\frac{\partial v_z^+}{\partial v_z} = \frac{1}{\sqrt{\tau_e/\rho}}$$

portanto,

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\sqrt{\tau_e/\rho}}{(r_e - r_i)} \cdot \frac{\partial v_z^+}{\partial R}$$

mas

$$\sqrt{\tau_e/\rho} = \frac{v r_e^+}{r_e}$$

portanto:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{vr_e^+}{r_e(r_e - r_i)} \frac{\partial v_z^+}{\partial R}$$

Substituindo estes valores adimensionalizados, na equação (III.4), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial R} \left[(\epsilon_H + \alpha) \frac{2Rq}{k} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{2\hat{\mu}R(r_e - r_i)}{\rho C_p} \left(\frac{vr_e^+}{r_e(r_e - r_i)} \cdot \frac{\partial v_z^+}{\partial R} \right)^2 = \\ & = v_z^+ \frac{vr_e^+}{r_e} R(r_e - r_i) \frac{q}{k} \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \end{aligned}$$

Após alguns algebrismos, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\frac{\epsilon_H}{v} + \frac{1}{P_r} \right) R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\hat{\mu}k}{v\rho C_p q} \cdot \frac{v_z^2}{v_z^{+2}} \cdot \frac{1}{(r_e - r_i)} \left(\frac{\partial v_z^+}{\partial R} \right)^2 = \\ & = \frac{v_z^+ r_e^+}{2r_e} \cdot (r_e - r_i) \frac{\partial \theta}{\partial z^+} \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo por 2 o 2º termo do 1º membro e, considerando que

$$\frac{qD}{k} = \Delta T \quad ; \quad D = 2(r_e - r_i) \quad \text{e} \quad b = \frac{r_e}{r_i}$$

vem:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\frac{\epsilon_H}{v} + \frac{1}{P_r} \right) R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + \frac{\hat{\mu}}{v\rho} \cdot \frac{v_z^2}{C_p \Delta t} \cdot \frac{2}{v_z^{+2}} \left(\frac{\partial v_z^+}{\partial R} \right)^2 =$$

$$= \frac{b-1}{2b} v_z^+ r_e^+ \frac{\partial \theta}{\partial z^+}$$

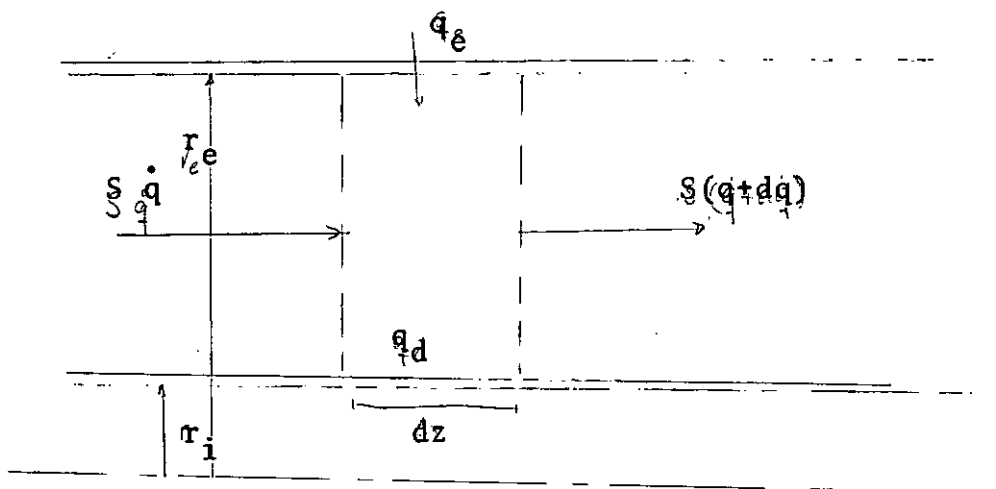
Como $\frac{\hat{\mu}}{v\rho} = 1$ e $\frac{v_z^2}{C_p \Delta t} = Ec$ (número de Eckert)

temos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\frac{\epsilon_H}{v} + \frac{1}{p_r} \right) R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] + Ec \frac{2}{v_z^{+2}} \left(\frac{\partial v_z^+}{\partial R} \right) = \frac{b-1}{b} v_z^+ r_e^+ \frac{\partial \theta}{\partial z^+}$$

APÊNDICE II

Balanco de Calor no interior do tubo anular



Balanco de Calor no Interior do Tubo Anular.

$$4\pi r_e^2 \left(\frac{b-1}{b} \right) q dz^+ + qd = \pi (r_e^2 - r_i^2) v_z \rho C_p \frac{dT_m}{dz^+} dz^+$$

Dividindo os dois membros da equação por dz^+ e fazendo $dT_m = \frac{qD}{k} d\theta_m$, tem-se

$$4\pi r_e^2 \left(\frac{b-1}{b} \right) q + \frac{qd}{dz^+} = \pi (r_e^2 - r_i^2) v_z \rho C_p \frac{qD}{k} \frac{d\theta_m}{dz^+}$$

Dividindo e multiplicando a parcela à direita do sinal de igualdade por r_i^2 e r_e^2 , vem

$$4\pi r_e^2 \left(\frac{b-1}{b} \right) q + \frac{qd}{dz^+} = v_z \rho C_p \pi r_e^2 \left(\frac{b^2-1}{b^2} \right) \frac{qD}{k} \frac{d\theta_m}{dz^+}$$

Desagrupando $\frac{d\theta_m}{dz^+}$ dos demais elementos da equação e colocando-o à esquerda do sinal de igualdade, temos

$$\frac{d\theta_m}{dz^+} = \frac{k}{v_z \rho C_p D} \cdot \frac{4b}{(b+1)} + \frac{kb^2 q_d}{v_z \rho C_p D \pi r_e^2 (b^2-1) q dz^+}$$

Sabe-se que

$$\text{RePr} = \frac{v_z \rho C_p D}{k} \quad ; \quad b^2 = \frac{r_e^2}{r_i^2}$$

portanto

$$\frac{d\theta_m}{dz^+} = \frac{1}{\text{RePr}} \cdot \frac{4b}{(b+1)} + \frac{k q_d}{v_z \rho C_p D \pi r_i^2 (b^2-1) q dz^+}$$

mas

$$q_d = \pi (r_e^2 - r_i^2) v_z \mu dv_z / dr$$

Substituindo em (A-II.5), temos,

$$\frac{d\theta_m}{dz^+} = \frac{1}{\text{RePr}} \cdot \frac{4b}{(b+1)} + \frac{k v_z \mu dv_z / dr}{v_z \rho C_p D q dz^+}$$

Se substituirmos na (A-II.6) $\frac{k}{qD}$ por $\frac{1}{\Delta T}$ e se multiplicarmos e dividirmos por v_z , teremos:

$$\frac{d\theta_m}{dz^+} = \frac{1}{\text{RePr}} \cdot \frac{4b}{(b+1)} + \frac{v_z^2 \mu dv_z / dr}{\rho v_z^2 C_p \Delta T dz^+}$$

rearranjando, vê-se:

$$\frac{d\theta_m}{dz^+} = \frac{1}{RePr} \cdot \frac{4b}{(b+1)} + \frac{v_z^2}{C_p \Delta T} \cdot \frac{\mu dv_z/dr}{\rho v_z^2 dz^+}$$

mas

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu \quad ; \quad \frac{dv_z}{dr} = \frac{r_e^+}{r_e(r_e^+ - r_i^+)} \frac{dv_z^+}{dR}$$

e

$$v_z^2 = \frac{v_z^{+2} v^2 r_e^+}{r_e^2}$$

decorrendo destas igualdades, temos a seguinte equação:

$$\frac{d\theta_m}{dz^+} = \frac{1}{RePr} \cdot \frac{4b}{(b+1)} + Ec \frac{Re_x dv_z^+/dR}{v_z^{+2} r_e^+ dz^+}$$

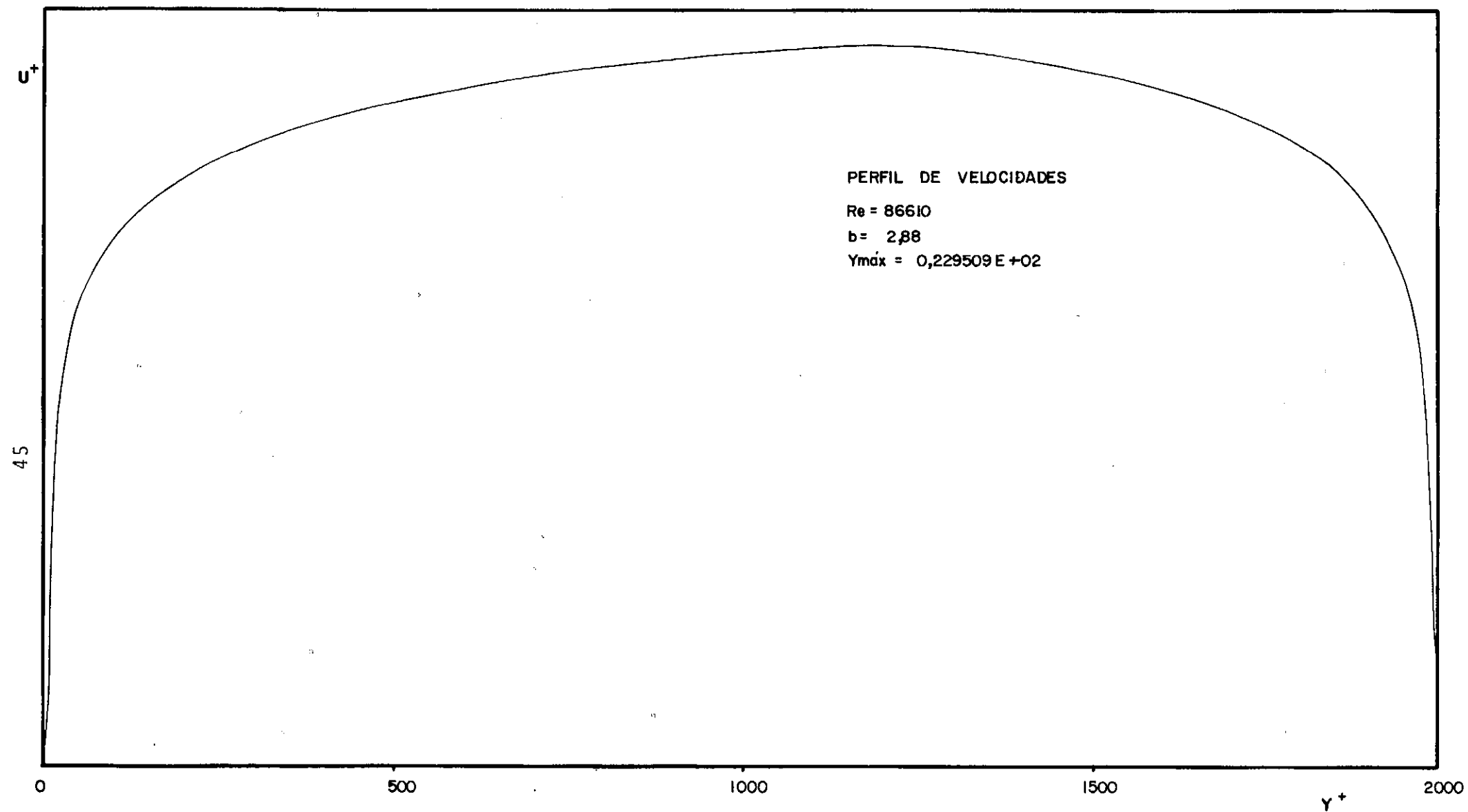


FIG : I

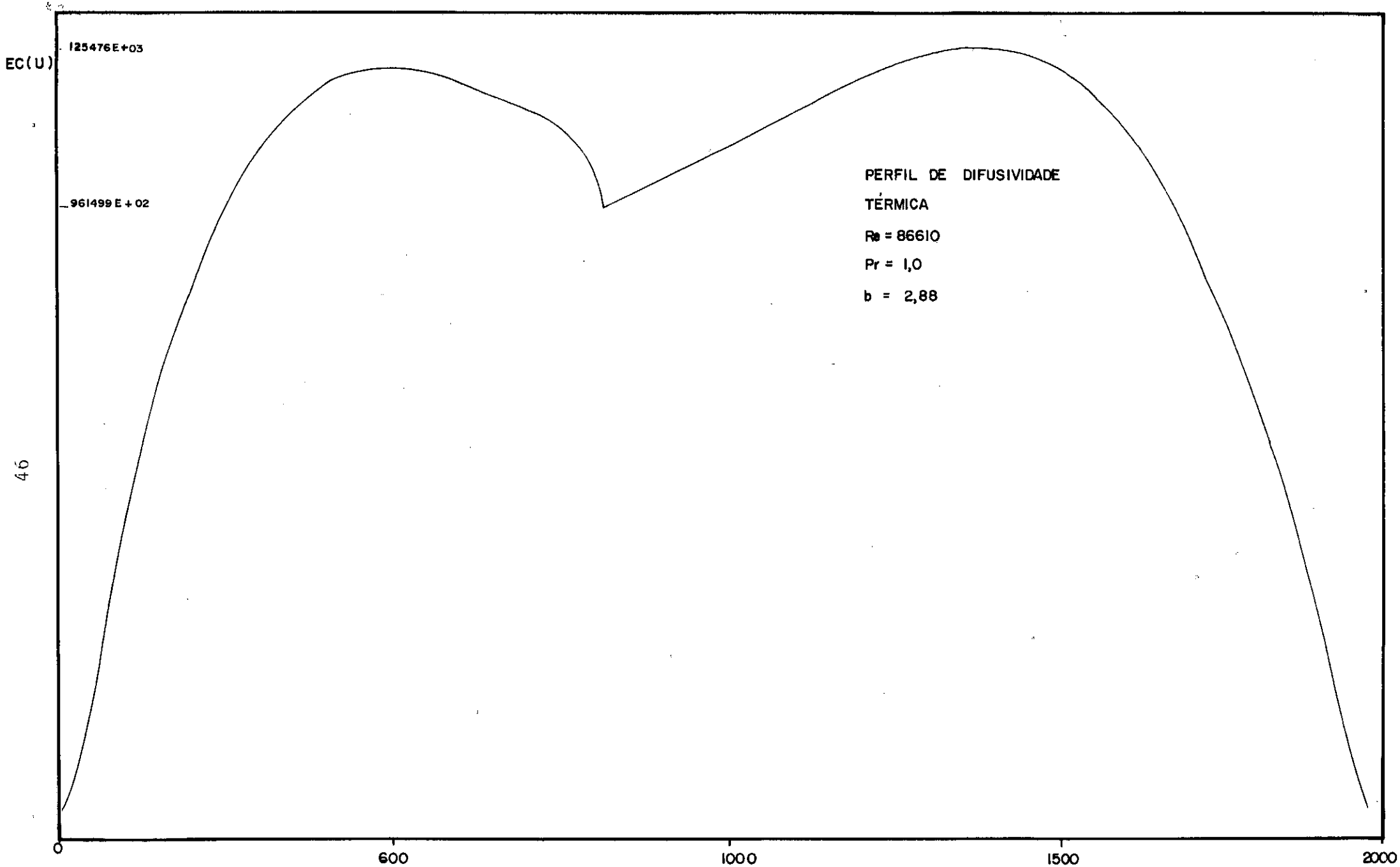


FIG: 2

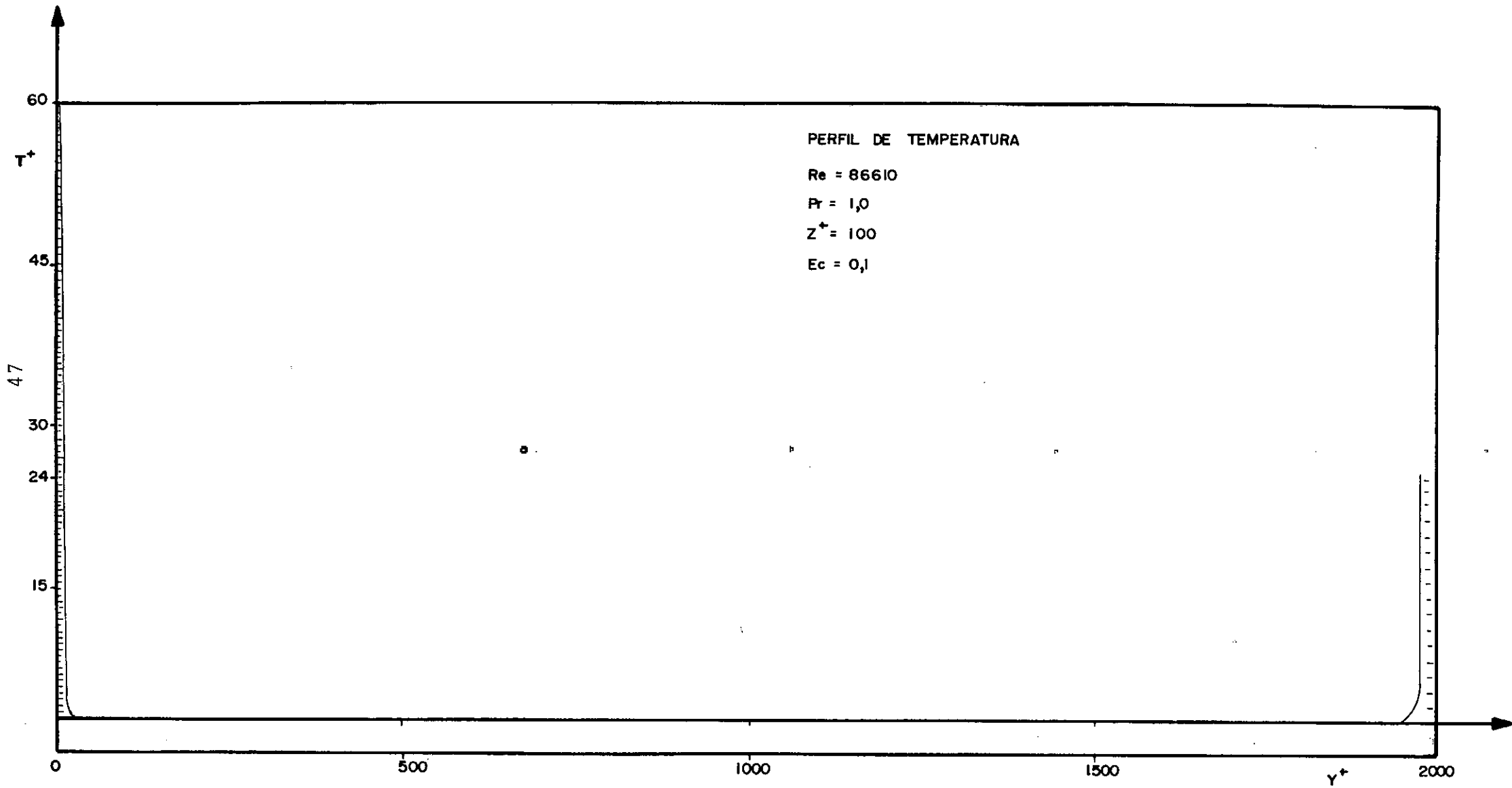


FIG: 3

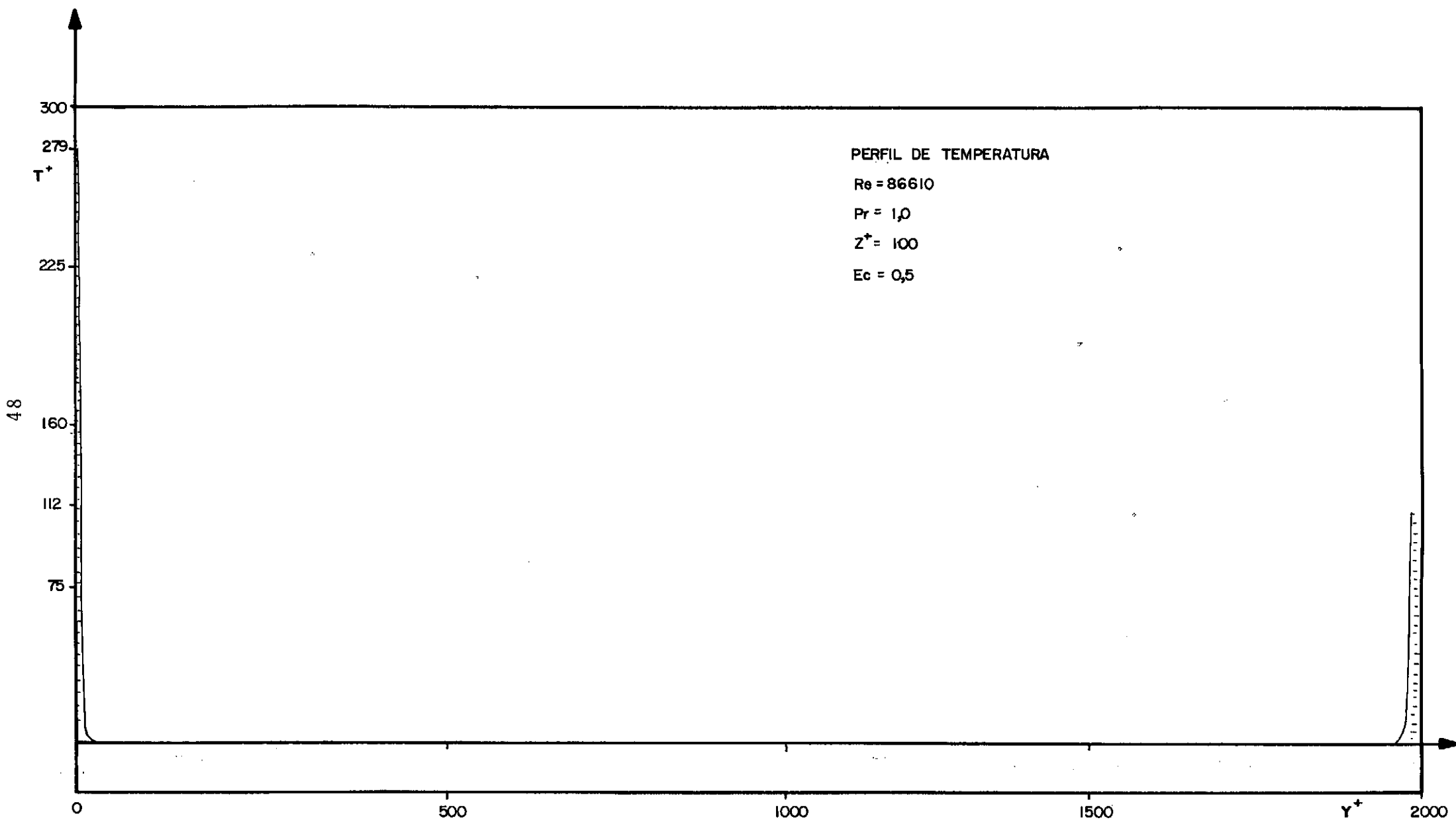


FIG : 4

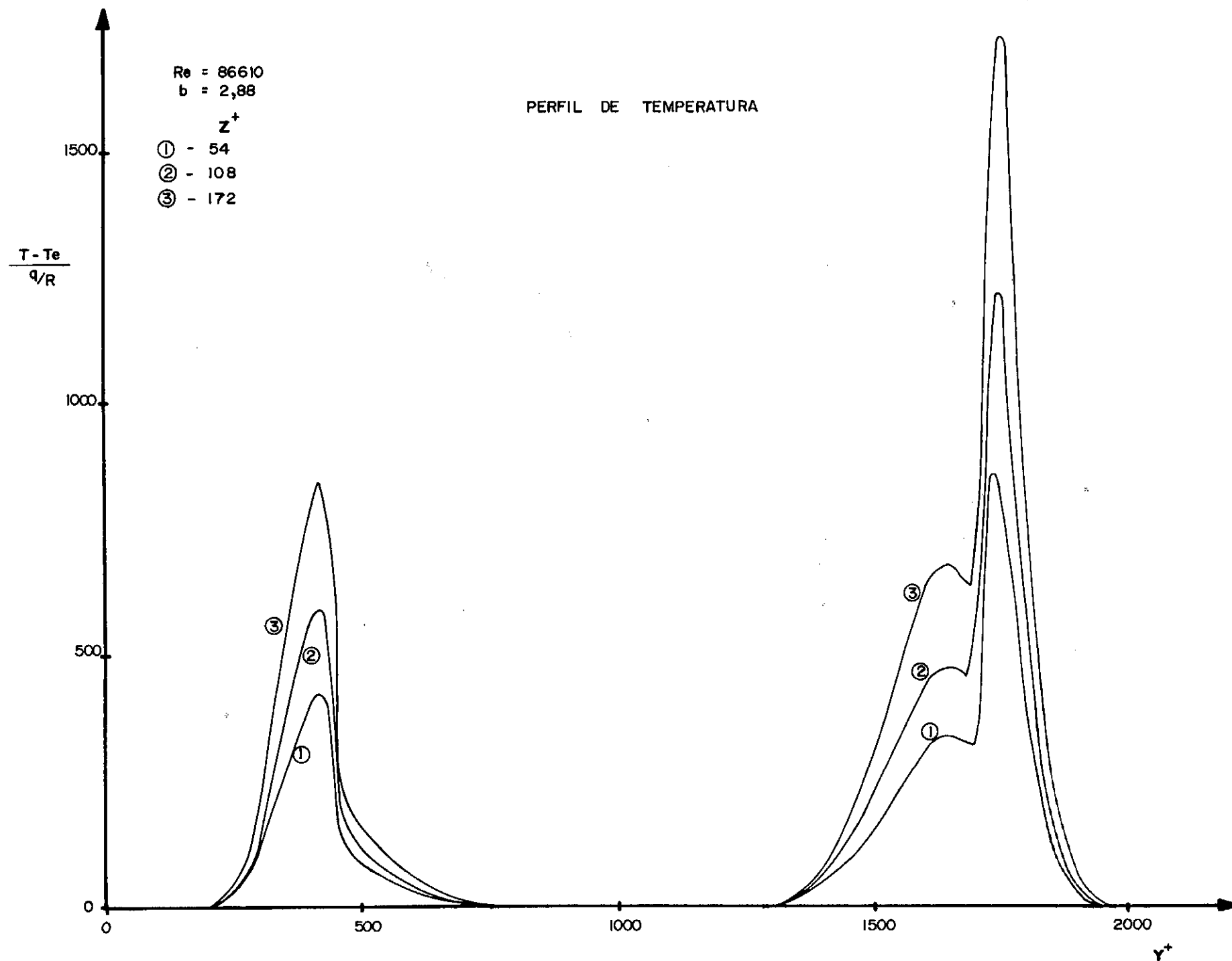


FIG : 5

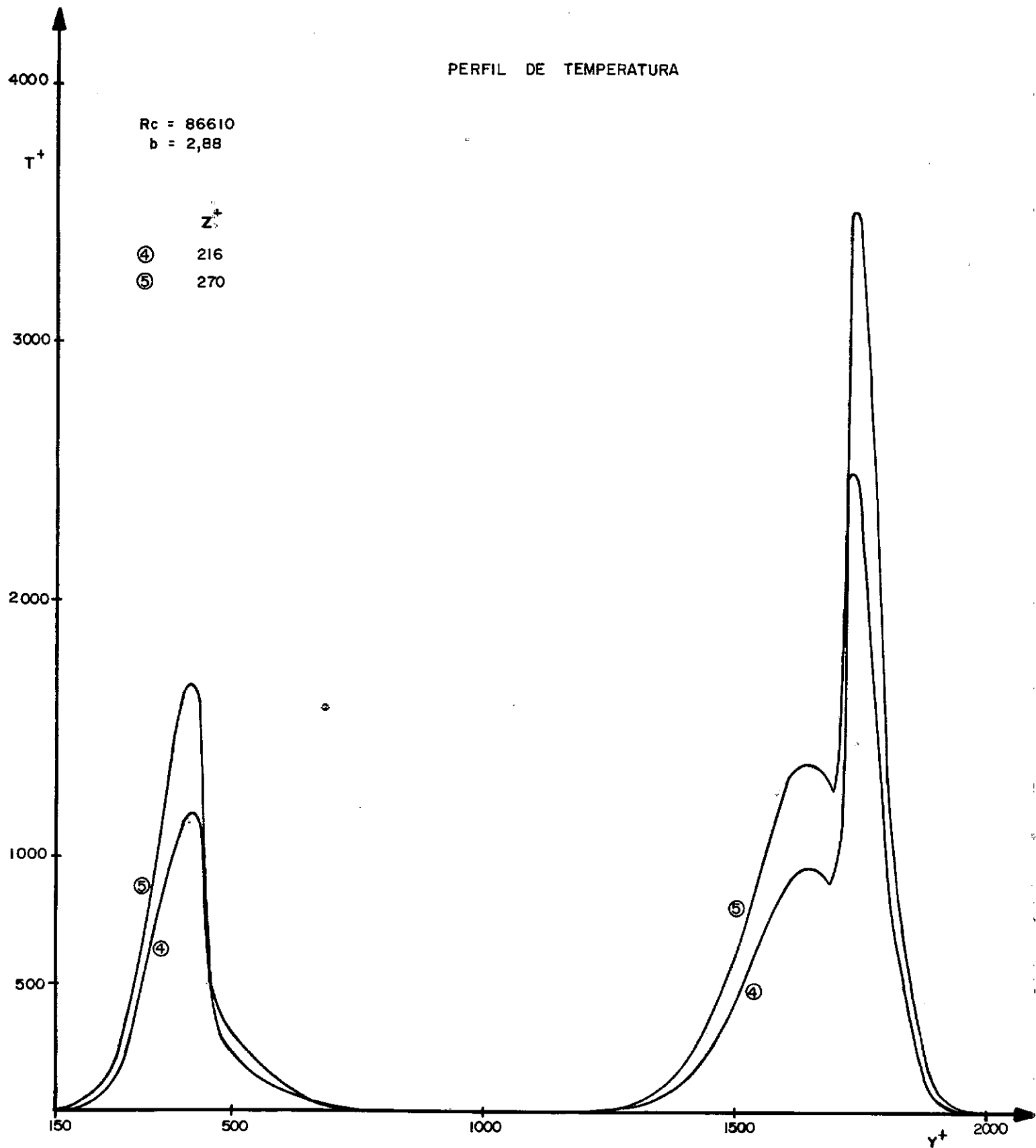


FIG : 6

APÊNDICE III

LISTAGEM

```

FILE 18=SALVA,UNIT=DISKPACK,RECOFD=1600,AREA=7
FILE 8=CARTOES,UNIT=READER
FILE 5=LACS,UNIT=PRINTER
FUNCTION DIFIL (YI,UI,PUS0)
COMMON X1,X2,X5,X6,X3,X4,XN2,X8,X9
DIFIL=XN2*UI*YI*(1.-EXP(-XN2*UI*YI))
RETURN
END

```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



P. 52

```

FUNCTION DIFIT (YI,UI,CEMNI)
COMMON X1,X2,YMI,RIM,YMO,ROM,XN2,X8,YLI,B1,A1,FO,FI,RMT
DIFIT=(1./15.)*(1.-A1/B1)*RCM*(1.-(1.-YI/YMI)**2)*(1.+2*(1.-YI/YMI)
**2)*(1.+0.6*(SORT(((RI*(RC**2-RMT**2))/(RO*(RM1**2-RI**2)))*(1.-
$YI/YMI)*(1.-(1.-YI/YMI))))*(1.-(1.-YMI/YMO)*(1.-YI/YMI))-CEMNI*(Y
$MI-YI)/(YMI-YLI)
RETURN
END

```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA





```

SUBROUTINE VECC(I)
COMMON D2,NO,X5,X6,X3,X4,X7,X8,X9
H2=H/2.0
Y=YI
U=UI
DU=DU I
DC 1 I=NO,N
DC 2 J=1,K
AN=H2*FON(Y,U,DU)
BN=H2*FON(Y+H2,U+H2*(DU+AN/2.0),DU+AN)
CN=H2*FON(Y+H2,U+H2*(DU+AN/2.0),DU+BN)
DN=H2*FON(Y+H2,U+H2*(DU+CN),DU+2.0*CN)
Y=Y+H
U=U+H*(DU+(AN+BN+CN)/3.0)
DU=DU+(AN+2.0*BN+2.0*CN+DN)/3.0
2 CONTINUE
VECC(I)=U
1 CONTINUE
D2=DU
RETURN
END

```

2

1

P. 53

```

SUBROUTINE RELK1(B1,RE,RI)
COMMON X1,X2,YMI,RIP,YMO,ROM,XN2,FK,YLI,X10,A1,RC,X13,RMT
RC=B1*RI
A=0.202095E 02
B=0.110080E-03
C=-0.463667E-09
D=0.710030E-15
E=0.0
F=0.0
RCM=RE/(A+B*RE+C*RE**2+D*RE**3+E*RE**4+F*RE**5)
A=0.937841
B=0.420264E 03
C=-0.378185E 07
D=0.519342E 11
E=-0.154319E 15
R=1.0/RE
FK=A+E*R+C*R**2+D*R**3+E*R**4
1 A=0.125899E 02
IF(RE-58000.0)1,1,2
B=0.129817E 06
C=0.595697E 09
D=-0.595964E 13
E=0.146292E 17
YLI=A+B*R+C*R**2+D*R**3+E*R**4
R=1.0/RE
GC TO 3
2 YLI=15.15
3 RMT=FK*(SQRT((RO**2-RI**2)/(2*ALOG(RO/RI))))
A1=RMT/RI
YMO=(1-A1/B1)*ROM
IF(YMO-520.0)4,4,5
4 A=-0.688057E-02
B=0.202633E-03
C=-0.731127E-06
D=0.121011E-08
E=-0.760243E-12
XN2=A+B*YMO+C*YMO**2+D*YMO**3+E*YMO**4
GC TO 6
5 XN2=G.0154
6 CONST=SQRT((B1*(A1**2-1))/(E1**2-A1**2))
YMI=((A1-1)/B1)*CONST*ROM
RIM=(CONST/B1)*ROM
WRITE(5,3001) RO,B1,RCM,FK,YLI,RMT,A1,YMO,XN2,YMI,RIM
3001 FORMAT (/,'1GX,11(F11.6),/')
RETURN
END

```





```

FUNCTION DIFOL (YO,UO,DEMNO)
COMMON X1,X2,X5,X6,YMO,RCM,X7,X8,YLI,B1,A1
DIFOL=XN2*UO*YO*(1.-EXP(-XN2*UO*YO))
RETURN
END

```

P. 54

```

FUNCTION DIFOT (YO,UO,DEMNO)
COMMON X1,X2,X5,X6,YMO,RCM,X7,X8,YLI,B1,A1
DIFOT=(1./15.)*(1.-A1/B1)*RCM*(1.-(1.-YO/YMO)**2)*(1.+2*(1.-YO/YMO
$)**2)*(1.+G.6*(1.-YO/YMO)*(1.-(1.-YO/YMO)))-DEMNC*(YMO-YO)/(YMO-YL
$O)
RETURN
END

```



```

FUNCTION DER15(YI,UI)
COMMON X1,X2,YMI,RIM,X3,X4,XN2,X8,X9
DER15=((RIM*((YMI+RIM)**2)-((YI+RIM)**2)))/((YI+RIM)*((YMI+RIM)*
$2-((RIM**2))))/(1.0+XN2*UI*YI*(1.0-EXP(-XN2*UI*YI)))
RETURN
END

```

P. 55

```

FUNCTION DER16(YI,UI,DUI)
COMMON X1,X2,YMI,RIM,X3,X4,X7,X8,X9
DER16=(((-0.36)*(DUI**2))/SQRT(((RIM*((YMI+RIM)**2)-((YI+RIM)**2)
$)/((YI+RIM)*((YMI+RIM)**2-((RIM**2))))))-DUI)
RETURN
END

```





```

FUNCTION DER08(Y0,UC)
COMMON X1,X2,X5,X6,YMC,ROM,X7,X8,X9
DER08=(((-0.36)*(U0**2))/SQRT(((ROM*((ROM-Y0)**2)-((ROM-YM0)**2)))
$/((ROM-Y0)*((ROM**2)-((ROM-YMC)**2))))-U0)
RETURN
END

```

P. 56

```

FUNCTION DER07(YC,UC)
COMMON X1,X2,X5,X6,YM0,ROM,XN2,X8,X9
DER07=((ROM*((ROM-YC)**2)-((ROM-YM0)**2)))/((ROM-Y0)*((ROM**2)-((
$ROM-YMC)**2))))/(1.0+(XN2*UC*Y0*(1.0-EXP(-XN2*L0*Y0))))
RETURN
END

```





```

SUBROUTINE BKSMT(FON,H,YI,UI,VEC,H,VEC,H,VEC,PR,I,NO,DO,DELTA)
DIMENSION VEC(1600),VET(1600)
COMMON X1,X2,YMI,RIM,X3,ROM,X7,X8,YLI
Y=YI
U=UI
DO 2 I=NO,N
Y=Y+H
U=VEC(I)
IF (PR-0.6) 3,4,5
3 T=380*REY**(-0.58)
GO TO 40
4 RETURN
5 T=57*REY**(-0.46)
GO TO 40
40 A=((1.+135*REY**(-0.45)*EXP(-(YI/YMI)**0.25))/(1.+T*PR**(-0.58)*EXP
8(-(YI/YMI)**0.25)))*FAN(Y,U,DELTA)
VET(I)=A
2 CONTINUE
RETURN
END

```

P. 57

```

SUBROUTINE BKSMT(FON,H,YI,UI,K,N,VEC)
DIMENSION VEC(300)
COMMON X1,X2,X5,X6,X3,X4,X7,X8,X9
H2=H/2.0
U=UI
Y=YI
DO 2 I=1,N
T1=H*FON(Y,U)
T2=H*FON(Y+H2,U+T1/2.0)
T3=H*FON(Y+H2,U+T2/2.0)
T4=H*FON(Y+H,U+T3)
U=U+(T1+2.0*T2+2.0*T3+T4)/6.0
Y=Y+H
2 VEC(I)=U
RETURN
END

```





```

SUBROUTINE COEFF(H,N,P,Y,U,A2,H;S,D)
DIMENSION A2(1),B(1),C(1),D(1),Y(1),D(1)
COMMON X1,N0,X5,X6,X3,RCM,X7,X8,X9,B1,X11,RO,FI,X14
DO 51 I=N0,N
A2(I) = ((P(I)/(2*H**2)) + (P(I)/((Y(I)/(RO-RI))*(4*H))) + (1./(4*H)))*(P
S(I+1)-P(I-1))/(2*H))
B(I) = ((-P(I)/H**2) - ((B1-1.)/(2*B1))*(U(I))*RO)
C(I) = ((P(I)/(2*H**2)) - (P(I)/((Y(I)/(RO-RI))*(4*H))) - (1./(4*H)))*(P
*I+1)-P(I-1))/(2*H))
D(I) = -(2*EC/U(I))*((U(I+1)-U(I-1))/(2*H))**2
51 CONTINUE
RETURN
END

```

P. 58



```

C
SUBROUTINE RESOLV(N,CI,II,TEMP)
DIMENSION TEMP(1600),TI(1600),CI(1600,3)
COMMON X1,X2,X5,X6,X3,X4,X7,X8,X9
TRIANGULARIZACAO DA MATRIZ
DO 2 K=1,N
CI(K,1)=CI(K,1)/CI(K,2)
CI(K,3)=CI(K,3)/CI(K,2)
TI(K)=TI(K)/CI(K,2)
CI(K,2)=1.0
IF(K-N)3,2,2
3 CONTINUE
I=K+1
CI(I,2)=CI(I,2)-CI(I,1)*CI(K,3)
TI(I)=TI(I)-CI(I,1)*TI(K)
CI(I,1)=0.0
2 CONTINUE
C
BACK SUBSTITUTION
TEMP(N)=TI(N)
DO 5 I=1,N-1
L=N-I
5 TEMP(L)=TI(L)-CI(L,3)*TEMP(L+1)
RETURN
END

```



```

EXTERNAL DER15, DER16, DER07, DER08, DIFIL, DIFIT, CIEEL, DIFOT
DIMENSION Y(1600), U(1600), VELI5(20), VELO7(20), VELL(1000), A(1600),
$VETO(1000), A2(1600), B(1600), C(1600), D(1600), TEMP(1600), P(1600), C1(
$1600,3), T1(1600), AI(1600)
COMMON D2, NG, YMI, RIM, YMO, ROM, XN2, FK, YLI, B1, A1, RO, RI, RMT
READ (8,999) LUCI
999 FCRMAT(I1)
IF (LUCI) 59,60,59
59 READ(18) TEMP
READ(18) U
READ(18) A2
READ(18) P
READ(18) C
READ(18) B
READ(18) Y
READ(18) D
READ(18) B1
READ(18) RO
READ(18) RI
N=997
KA=1
RCM=3240.576688
H=2.169724328
HC=2.169724328
EC=1.0
REWIND(18)
GC TO 30
60 DC 2786 L3=1,2
READ(8,61) E1,REY,RI,PR
61 FCRMAT(4F10.3)
CALL FELK1(B1,REY,RI)
YLO=YLI
C CALCULANDO CONDIÇÕES DE CONTORNO NOS PONTOS YLI E YLO
H=YLI/20.0
YI=0.0
UI=0.0
K=1
N=20
CALL RKSM(DER15,H,YI,UI,K,N,VELI5)
CALL RKSM(DER07,H,YI,UI,K,N,VELO7)
YI=YLI
UI=VELI5(20)
DERIV=((RIM*(((YMI+RIM)**2)-((YI+RIM)**2)))/((YI+RIM)*((YMI+RIM)**
$2-(RIM**2))))/(1.0+XN2*UI*YI*(1.0-EXP(-XN2*UI*YI)))
YG=YEG
UC=VELO7(20)
DEROV=((ROM*(((ROM-YO)**2)-((ROM-YMO)**2)))/((ROM-YO)*((ROM**2)-((
$ROM-YMO)**2))))/(1.0+XN2*UC*YO*(1.0-EXP(-XN2*UC*YO)))
WRITE(5,231) VELI5(20),DERIV,VELO7(20),DEROV
231 FCRMAT('1',T10,'VELOCIDADE NO PONTO YLI E IGUAL A',4X,E13.6,5X,'CU
$JA DERIVADA E IGUAL A',4X,E13.6,5X,'VELOCIDADE NO PONTO YLC E
$IGUAL A',4X,E13.6,5X,'CUJA DERIVADA E IGUAL A',4X,E13.6)
C CALCULO DAS VELOCIDADES NA CAMADA INTERNA LAMINAR
ZETA=(YMI+YMO)/100.0
ZETA1=YMI/2.0
HG=ZETA/10
H=HG
NL=FIX(YLI/H)
N=NL
YI=0.0
K=1
UI=0.0
CALL RKSM(DER15,H,YI,UI,K,N,U)
C COMEÇANDO CALCULO NA CAMADA INTERNA TURBULENTA
H1=((N+1)*HG)-YLI
NG=NL+1
H=H1
N=NG
K=1
YI=YLI
UI=VELI5(20)
DL=DERIV
CALL RKNO4(DER16,H,N,K,YI,UI,DU,U)
H=HG
K=1
YI=N*HG
UI=U(N)
DU=D2
NC=N+1
N=10
N54=N
CALL RKNO4(DER16,H,N,K,YI,UI,DU,U)
H1=H
K=1
YI=N*HG
UI=U(N)
DL=D2
NC=N+1
N=206
N55=N-N54

```

P. 59





```

NT=FIX((YMI-ZETA1)/H)
NC=N+1
YI=ZETA1
HT2=H
K=1
DU=C2
UI=U(N)
N=NT+(NO-1)
CALL FKNO4(DERO6,H,N,K,YI,UI,DU,U)
N56=N
RTITO=(RIM*E1)/ROM
DC 1259 I7=1,N
U(I7)=(U(I7))*RTITO
1259 CONTINUE
N57=N56-206
WRITE(5,1260) N54,HG,N55,HT1,N57,HT2
1260 FORMAT(///,T10,'NUMERO DE PONTOS NA CAMADA INTERNA ATE ZETA E IGUA
$ L A',4X,I4,8X,'COM STEP IGUAL A',2X,F7.4,///,T10,'NUMERO DE PONTOS
$ NA CAMADA INTERNA ATE ZETA1 E IGUAL A',3X,I4,8X,'COM STEP IGUAL A'
$ ,2X,F7.4,///,T10,'NUMERO DE PONTOS NA CAMADA INTERNA ATE YMI+ E IGU
$ AL A',4X,I4,8X,'COM STEP IGUAL A',2X,F7.4)
N58=791-N56
WRITE(5,1975) N54,HG,N55,HT1,N58,HT2
1975 FORMAT(///,T10,'NUMERO DE PONTOS NA CAMADA EXTERNA ATE ZETA E IGUA
$ L A',4X,I4,8X,'COM STEP IGUAL A',2X,F7.4,///,T10,'NUMERO DE PONTOS
$ NA CAMADA EXTERNA ATE ZETA1 E IGUAL A',3X,I4,8X,'COM STEP IGUAL A'
$ ,2X,F7.4,///,T10,'NUMERO DE PONTOS NA CAMADA EXTERNA ATE YMO+ E IGU
$ AL A',4X,I4,8X,'COM STEP IGUAL A',2X,F7.4,///)
WRITE(5,400) D2
400 FORMAT(T30,'DERIVADA NO PONTO PROXIMO A YMI',5X,E13.6)
Y(I)=HG
DC 33 I=2,N54
Y(I)=Y(I-1)+HG
33 CONTINUE
N54=N54+1
DC 750 I=N54,206
Y(I)=Y(I-1)+HT1
750 CONTINUE
DC 854 I=207,792
Y(I)=Y(I-1)+HT2
854 CONTINUE
J=997-(N54-1)
DC 490 I=793,J
Y(I)=Y(I-1)+HT1
490 CONTINUE
J=J+1
DC 452 I=J,997
Y(I)=Y(I-1)+HG
452 CONTINUE
C CALCULO DAS VELOCIDADES NA CAMADA EXTERNA LAMINAR
YI=C.C
H=HG
N=NL
K=1
UI=C.C
CALL RKSM(DERO7,H,YI,UI,K,N,VELOC)
HJ=((N+1)*HG)-YLO
NC=N+1
C COMECANDO O CALCULO NA CAMADA EXTERNA TURBULENTO
H=HT
N=NO
K=1
YI=YLO
UI=VELO7(20)
DC DEROV
CALL FKNO4(DERO8,H,N,K,YI,UI,DU,VELOC)
H=HG
K=1
YI=N*HG
UI=VELOC(N)
DC D2
NC=N+1
N=206
CALL RKNO4(DERO8,H,N,K,YI,UI,DU,VELOC)
H=HT2
NT=FIX((YMO-ZETA1)/H)
NC=N+1
YI=ZETA1
K=1
DC D2
UI=VELOC(N)
N=NT+(NO-1)
CALL FKNO4(DERO8,H,N,K,YI,UI,DU,VELOC)
WRITE(5,602) D2

```

P. 60





```

N78=N56+1
M=N
N=N56+N
DC 10 K1=N78,N
U(K1)=VELOC(M)
M=M-1
10 CONTINUE
WRITE(5,532)
532 FORMAT(///,T48,'VETOR TOTAL DAS VELOCIDADES',///)
WRITE(5,2300)REY
2300 FORMAT(T35,'***** PARA REYNOLDS *****',2X,F10.0,///)
1)
H=HG
UI=0
YI=0
NC=1
NI=IFIX(YLI/H)
N=NI
CALL RHENO(CIFIL,N,YI,UI,U,H,A,REY,PR,T,NG,DU,DEMNI)
HI=((N+1)*HG)/YLI
H=HI
NC=NI+1
N=NI
YI=YLI
UI=U(N)
DEMNI=((1./15.)*(1.-A1/B1)*RCM*(1.-(1.-YLI/YMI)**2)*(1.+2*(1.-YLI/YMI)**2)*(1.+0.6*SQRT(((RI*(RO**2-RMT**2))/(RO*(RMI**2-RI**2)))*(1.-YLI/YMI)*(1.-(1.-YLI/YMI))))*(1.-(1.-YMI/YMO)*(1.-YLI/YMI))-XN2*YLI*UI*EXP(-XN2*YLI*UI))
CALL RHENO(CIFIT,N,YI,UI,U,H,A,REY,PR,T,NG,DU,DEMNI)
H=HG
YI=N*HG
UI=U(N)
NC=N+1
N=10
N54=N
CALL RHENO(CIFIT,N,YI,UI,U,H,A,REY,PR,T,NG,DU,DEMNI)
NI=IFIX((YMI-ZETA1)/H)
NC=N+1
YI=ZETA1
HI2=H
UI=U(N)
N=NI+(NG-1)
CALL RHENO(CIFIT,N,YI,UI,U,H,A,REY,PR,T,NG,DU,DEMNI)
C
CALCULO DA DIFUSIVIDADE DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO NA CAMADA EXTERNA LAMINAR
H=HG
UI=0.0
YI=0.0
NC=1
N=NI
CALL RHENO(CIFOL,N,YI,UI,VELOC,H,VETO,REY,PR,T,NC,DU,DEMNC)
HI=((N+1)*HG)-YLO
NC=N+1
H=HI
N=NG
YI=YLO
UI=VELOC(N)
DEMNO=((1./15.)*(1.-A1/B1)*RCM*(1.-(1.-YLG/YMO)**2)*(1.+2*(1.-YLG/YMO)**2)*(1.+0.6*(1.-YLG/YMO)*(1.-(1.-YLO/YMO)))-XN2*UG*YLO*(1.-EXP(-XN2*UG*YLO)))
CALL RHENO(CIFOT,N,YI,UI,VELOC,H,VETO,REY,PR,T,NC,DU,DEMNO)
H=HG
YI=N*HG
UI=VELOC(N)
NC=N+1
N=10
CALL RHENO(CIFOT,N,YI,UI,VELOC,H,VETO,REY,PR,T,NC,DU,DEMNO)
H=HI1
YI=N*HG
UI=VELOC(N)
NC=N+1
N=206
CALL RHENO(CIFOT,N,YI,UI,VELOC,H,VETO,REY,PR,T,NC,DU,DEMNO)
H=HI2
YI=ZETA1
NI=IFIX((YMO-ZETA1)/H)
NC=N+1
UI=VELOC(N)
N=NI+(NG-1)
CALL RHENO(CIFOT,N,YI,UI,VELOC,H,VETO,REY,PR,T,NC,DU,DEMNO)
N78=N56+1
M=N
N=N56+N
DC 20 K1=N78,N
A(K1)=VETOR(M)

```



```

M=M-1
20 CONTINUE
DC 3000 I=1,997
3000 P(I)=A(I)+1./PR
EC=1.0
DI=C.00005
H=HG
A2(1)=((P(1)/(2*H**2))+((P(1)/((Y(1)/(RC-RI))*(4*F)))+(1./((4*H)))*(P
S(2))/(2*H))
B(1)=(-(P(1)/H**2)-((B1-1.)/(2*B1))*U(1))*ROM
C(1)=((P(1)/(2*H**2))-((P(1)/((Y(1)/(RC-RI))*(4*H)))+(1./((4*H)))*(P
S(2))/(2*H))
D(1)=-((2*EC/U(1))*(U(2)/(2*H))**2
NC=2
NL=FIX(YLI/H)
N=NL
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
HT=((N+1)*HG)/YLI
H=HT
NC=NL+1
N=NO
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
H=HG
NC=N+1
N=10
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
H=(ZETA1-N*HG)/(400-N)
HT1=H
NC=N+1
N=206
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
NT=FIX((YMI-ZETA1)/H)
NL=N+1
HT2=H
N=NT+(NO-1)
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
H=HT2
NC=N+1
N=791
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
H=HT1
NC=N+1
N=987
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
H=HG
NC=N+1
N=997
CALL COEF(H,N,P,Y,U,A2,B,C,D)
KN=1
30 CI(1,1)=0.0
CI(1,2)=C(1)+B(1)
CI(1,3)=A2(1)
CI(N,1)=C(N)
CI(N,2)=B(N)+A2(N)
CI(N,3)=0.0
DC 1 I=2,N-1
CI(I,1)=C(I)
CI(I,2)=B(I)
CI(I,3)=A2(I)
1 TI(I)=D(I)
TI(1)=D(1)
TI(N)=D(N)-A2(N)*((HG**2/(4.0*(RO/(RO-RI))))+(HG**2/4.0)+HG/2.0)
CALL RESOLV(N,CI,TI,TEMP)
TEMP(N+1)=TEMP(N)+H**2/(4.0*(RO/(RO-RI)))+H**2/4.0+H/2.0
DC 832 I=2,N
D(I)=-A2(I)*TEMP(I+1)-((-(P(I)/H**2)+((B1-1.)/(2*B1))*U(I))*ROM)*TEM
SP(I)-C(I)*TEMP(I-1)-((2*EC/U(I))*2)*((U(I+1)-U(I-1))/(2*H))**2
832 CONTINUE
IF(KN/100*100.LT.KN)GO TO 47
DC 46 I=1,249,3
WRITE(5,648)Y(I),TEMP(I),Y(I+249),TEMP(I+249),Y(I+498),TEMP(I+498
),Y(I+747),TEMP(I+747)
648 FORMAT(5X,4(F8.3,3X,E13.6,3X),/)
46 CONTINUE
47 KN=KN+1
IF(KN-500)833,833,834
833 GO TO 30
2786 CONTINUE
834 WRITE(18) TEMP
WRITE(18) U
WRITE(18) A2
WRITE(18) P
WRITE(18) C
WRITE(18) B
WRITE(18) Y
WRITE(18) D
WRITE(18) B1
WRITE(18) RO
WRITE(18) RI
LOCK(18)
CALL EXIT
END

```